EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021 EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

(1) Dada la siguiente función $f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$ $a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0$

a) (1 punto) Determine los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{a\cdot x}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{a}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{a(x+1)}=\frac{1}{a(0+1)}=\frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0^3+b\cdot 0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{\ln(0+1)}{a\cdot 0}=\dfrac{\ln 1}{0}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{a\cdot x}=\dfrac{1}{a} \end{cases}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow\frac{1}{a}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$Contina\ en\ x=0\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b\in\mathbb{R}-\{^\wedge 0\} \end{cases}$$

$b)$

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{2\ln(x+1)}{x} & x>0 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2+b & x\le 0 \\ 2\cdot\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & x>0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$f'(-1)=0\Rightarrow 3\cdot(-1)^2+b=0\Rightarrow 3+b=0\Rightarrow b=-3\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & x\le 0 \\ \dfrac{2\ln(x+1)}{x} & x>0 \end{cases}$$

$$f''(x)=6x\Rightarrow f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0\Rightarrow M\acute{a}ximo$$

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+2\right)=-\infty\Rightarrow M\acute{\imath}nimo\ absoluto \\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln(x+1)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot\frac{1}{(x+1)}}{1}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{(x+1)}=\dfrac{2}{\infty}=0 \end{cases}$$

$$Como\ f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+2=-1+3+2=4>0\Rightarrow El\ m\acute{a}ximo\ es\ absoluto$$

(2) Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left[1-sen^2(x)\right]^{\frac{a}{x^2}}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\left[1-sen^2(x)\right]^{\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[1-sen^2(0)\right]^{\frac{a}{0^2}}=\left(1-0^2\right)^{\frac{a}{0}}=1^{\infty}$$

$$Siendo\,L=\left[1-sen^2(x)\right]^{\frac{a}{x^2}}\Rightarrow$$

$$\ln L=\lim_{x\to 0}\ln\left[1-sen^2(x)\right]^{\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}\ln\left[1-sen^2(x)\right]=\frac{a\cdot\ln\left[1-sen^2(0)\right]}{0^2}=\frac{a\cdot\ln\left(1-0^2\right)}{0}=\frac{a\cdot\ln 1}{0}=\frac{a\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\frac{1}{1-sen^2(x)}\cdot(-2)\cdot sen(x)\cdot\cos(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot sen(x)\cdot\cos(x)}{x\left[1-sen^2(x)\right]}=$$

$$=\frac{-a\cdot sen(0)\cdot\cos(0)}{0\cdot\left[1-sen^2(0)\right]}=\frac{a\cdot 0\cdot 1}{0\cdot\left(1-0^2\right)}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{(-a)\cdot\left[\cos(x)\cdot\cos(x)-sen(x)\cdot sen(x)\right]}{1\cdot\left[1-sen^2(x)\right]+x\left(-2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-a)\cdot\left[\cos^2(x)-sen^2(x)\right]}{\left[1-sen^2(x)\right]+x\left[-2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{(-a)\cdot\cos(2x)}{\left[1-sen^2(x)\right]+x\left[-2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)\right]}=$$

$$=\frac{(-a)\cdot\cos(2\cdot 0)}{\left[1-sen^2(0)\right]+0\cdot\left[-2\cdot sen(0)\cdot\cos 0\right]}=\frac{(-a)\cdot\cos(0)}{\left(1-0^2\right)+0\cdot(-2\cdot 0\cdot 1)}=\frac{(-a)\cdot 1}{1+0}=-a\Rightarrow\ln L=-a\Rightarrow L=e^{-a}\Rightarrow$$

$$e^{-a}=2\Rightarrow\ln e^{-a}=\ln 2\Rightarrow -a\cdot\ln e=\ln 2\Rightarrow -a\cdot 1=\ln 2\Rightarrow a=-\ln 2$$

(3) Calcule $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2\\ 1 & & 1 & 1 & -2\\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0}\end{array}$$

$$x^3-3x+2=(x-1)\left(x^2+x-2\right)\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9>0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1+3}{2}=1\\ x=\dfrac{-1-3}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

$$\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}\Rightarrow$$

$$A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2=x^2-1\Rightarrow$$

$$\begin{cases}Si\ x=1\Rightarrow A(1-1)(1+2)+B(1+2)+C(1-1)^2=1^2-1\Rightarrow 3B=0\Rightarrow B=0\\ Si\ x=-2\Rightarrow A(-2-1)(-2+2)+B(-2+2)+C(-2-1)^2=(-2)^2-1\Rightarrow 9C=3\Rightarrow C=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$Derivando\Rightarrow A\left[(x-1)+(x+2)\right]+B+2C(x-1)=2x\Rightarrow Si\ x=1\Rightarrow$$

$$A\left[(1-1)+(1+2)\right]+0+2C(1-1)=2\cdot 1\Rightarrow 3A=2\Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

Continuación Problema 3

$$\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{\frac{2}{3}}{(x-1)}+\frac{0}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{3}}{(x+2)}$$

$$\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{2}{3}\ln t+\frac{1}{3}\ln u=\frac{1}{3}\ln t^2+\frac{1}{3}\ln u=\frac{1}{3}\ln\left(t^2u\right)$$

$$\begin{cases} x-1=t\Rightarrow dx=dt \\ x-1=u\Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\ln\left[(x-1)^2(x+2)\right]=\ln\left[(x-1)^2(x+2)\right]^{\frac{1}{3}}=\ln\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}+K$$

$$\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx=\ln\sqrt[3]{x^3-3x+2}+K$$

(4) Para la siguiente función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto x=1.

$a)$

$$x^2-x-2=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9>0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1+3}{2}=2 \\ x=\frac{1-3}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(2)=\dfrac{2\cdot2^3-2^2}{2^2-2-2}=\dfrac{4}{0}\Rightarrow \text{Sin } solución \\ f(-1)=\dfrac{2\cdot(-1)^3-(-1)^2}{(-1)^2-(-1)-2}=\dfrac{-3}{0}\Rightarrow\text{Sin } solución\end{cases}\Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\,,2\}$$

$$Asíntotas\ verticales\ en\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ x=-1\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2-0}{0-0-0}=\frac{2}{0}\Rightarrow$$

$No\ existe\ a\sin tota\ horizontal\ cuando\ x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{2-\frac{1}{-\infty}}{\frac{1}{-\infty}-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{-\infty}}=\frac{2-0}{0-0-0}=\frac{2}{0}\Rightarrow$$

$No\ existe\ a\sin tota\ horizontal\ cuando\ x\to-\infty$

Continuación del Problema 4

$a)$*Continuación*

$$x^2-x-2=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9>0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1+3}{2}=2\\ x=\dfrac{1-3}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{2\cdot2^3-2^2}{2^2-2-2}=\dfrac{4}{0}\Rightarrow \text{Sin } solución\\ f(-1)=\dfrac{2\cdot(-1)^3-(-1)^2}{(-1)^2-(-1)-2}=\dfrac{-3}{0}\Rightarrow \text{Sin } solución\end{array}\right.\Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\,,\,2\}$$

$$Asíntotas\ verticales\ en\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-1\end{cases}$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=$$

$$=\frac{2-0}{1-0-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2+4x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0-0}=1$$

$Existe\ as\acute{\imath}ntota\ oblicua,\ y=2x+1$

$b)$

$$f'(x)=\frac{(6x^2-2x)\cdot(x^2-x-2)-(2x-1)\cdot(2x^3-x^2)}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$=\frac{6x^4-6x^3-12x^2-2x^3+2x^2+4x-(4x^4-2x^3-2x^3+x^2)}{(x^2-x-2)^2}=\frac{6x^4-8x^3-10x^2+4x-(4x^4-4x^3+x^2)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$=\frac{6x^4-8x^3-10x^2+4x-4x^4+4x^3-x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{2x^4-4x^3-11x^2+4x}{(x^2-x-2)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{2\cdot1^3-1^2}{1^2-1-2}=-\dfrac{1}{2}\\ f'(1)=\dfrac{2\cdot1^4-4\cdot1^3-11\cdot1^2+4\cdot1}{(1^2-1-2)^2}=\dfrac{2-4-11+4}{(-2)^2}=-\dfrac{9}{4}\end{array}\right.\Rightarrow y+\frac{1}{2}=-\frac{9}{4}(x-1)\Rightarrow 4y+2=-9x+9\Rightarrow$$

$La\ recta\ tangente\ es\ \ 9x+4y-7=0$

(5) Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

$$A-kI=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0&-2\\1&2+k&1\\1&0&3+k\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left|A-kI\right|=\begin{vmatrix}k&0&-2\\1&2+k&1\\1&0&3+k\end{vmatrix}=(2+k)\begin{vmatrix}k&-2\\1&3+k\end{vmatrix}=(2+k)\left(3k+k^2+2\right)$$

$$k^2+3k+2\Rightarrow\Delta=3^2-4\cdot1\cdot2=1>0\Rightarrow k=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{-3+1}{2}=-1\\k=\frac{-3-1}{2}=-2\end{cases}$$

$$\left|A-kI\right|=(2+k)(k+2)(k+1)=(k+2)^2(k+1)\Rightarrow\left|A-kI\right|=0\Rightarrow(k+2)^2(k+1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=-1\\k=-2\end{cases}$$

$$\forall k\in\mathbb{R}-\{-2,-1\}\Rightarrow\left|A-kI\right|\neq0\Rightarrow rang\ (A-kI)=3$$

$Si\ k=-2$

$$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A-kI)=1$$

$Si\ k=-1$

$$\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A-kI)=2$$

$b)$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-2)=4\neq0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t$$

$$A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\\-2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}6&0&-4\\-2&2&-2\\-2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}6&0&-4\\-2&2&-2\\-2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$$

(6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

$a)$

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2f \\ -g & -i & -i \\ a & c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} + 0 \left(dos\ columnas\ iguales\right) =$$

$$= 2\begin{vmatrix} d & e & f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \left(\text{int}ercambiar\ \ filas\right) =$$

$$= 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \left(\text{int}ercambiar\ \ filas\right) = (-2) \cdot 5 = -10$$

$b)$

$$\left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right) \cdot X = \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow I \cdot X = \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A - \frac{1}{2} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow Exixte \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} = \frac{1}{\left|A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right|} \cdot adj\left[\left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{\wedge T}\right] \Rightarrow \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{\wedge T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$adj\left[\left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{\wedge T}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A - \frac{1}{2} \cdot A^T\right)^{-1} = \frac{1}{(-6)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Continuación del Problema 6

$$\left(A-\frac{1}{2}\cdot A^T\right)^{-1}=\frac{1}{(-6)}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{6}\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{(-6)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -4\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 9\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{(-6)}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -38\\ 26\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{19}{3}\\ -\frac{13}{3}\end{pmatrix}$$

(7)

a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial $\begin{cases}2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}$.

$a)$

$$\begin{cases}4X+6Y=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\\ 9X-6Y=3\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 13X=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15 & 9\\ -6 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$13X=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}6X+9Y=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\\ -6X+4Y=(-2)\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 13Y=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 9 & 21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 6\\ -4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 0\\ 13 & 13\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$13Y=\begin{pmatrix}-13 & 0\\ 13 & 13\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-13 & 0\\ 13 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Continuación del Problema 7

$b)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots$$

$\ldots\ldots$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -\left(2^n - 1\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto A = (0 , 1 , 1) y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo: $B_1 = (-1,0,2)$, $B_2 = (1,3,1)$, $B_3 = (2, -1,0)$.

El vector director de la recta r buscada es perpendicular a los vectores directores de ambos planos, por lo tanto es su producto vectorial y además coincide

Para hallar el plano π_1 tenemos los vectores B_1B_2 , B_1B_3 y B_1G que son coplanarios y du producto mixto (que es el volumen del paralelepípedo que forman es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{B_1B_2} = (1\,,3\,,1) - (-1\,,0\,,2) = (2\,,3\,,-1) \\ \overrightarrow{B_1B_3} = (2\,,-1\,,0) - (-1\,,0\,,2) = (3\,,-1\,,-2) \\ \overrightarrow{B_1G} = (x\,,y\,,z) - (-1\,,0\,,2) = (x+1\,,y\,,z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-6(x+1) - 3y - 2(z-2) - 9(z-2) - (x+1) + 4y = 0 \Rightarrow -7(x+1) + y - 11(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 7x - y + 11z - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (7\,,-1\,,11) \\ \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1\,,0\,,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_1}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 11\vec{j} + \vec{k} - 14\vec{j}$$

$$\overrightarrow{v_r} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-2\,,-3\,,1) \equiv (2\,,3\,,-1)\, r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 2 \\ -x = 2z - 2 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

9) Sean los siguientes vectores:

$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1),\ \overrightarrow{u_2} = (0,3,1),\ \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0),\ \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo: $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones: $\left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right)$ $\left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right) \times \left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right)$ siendo · y × los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = 2\cdot(-1,1,1) - (0,3,1) = (-2,2,2) - (0,3,1) = (-2,-1,1) \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3} = (-1,1,1) + (1,-2,0) = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-2,-1,1) = a\cdot(0,-1,1) + b\cdot(-2,0,1) \Rightarrow (-2,-1,1) = (0,-a,a) + (-2b,0,b) \Rightarrow$$

$$(-2,-1,1) = (-2b,-a,a+b) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 = -2b \Rightarrow b = 1 \\ -1 = -a \Rightarrow a = 1 \\ a + b = 1 \Rightarrow 1 + 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow Son\ vectores\ linealmente\ independientes$$

$b)$

$$\left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right) = (-2,-1,1)\cdot(-2,-1,1) = (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 4 + 1 + 1 = 6$$

$$\left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right) = (-2,0,1) - (-1,1,1) = (-1,-1,0)$$

$$(-1,-1,0)\times(-1,-1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (tiene\ dos\ filas\ iguales)$$

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

Si X es la variable "cantidad de hierro en suero de una mujer adulta", nos dicen que X sigue un normal N(μ, σ) =
= N(120, 30).
(a)
¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

Me piden **p(una mujer tenga anemia por falta de hierro) = p(X ≤ 75) =** {Tipificamos} = $p\left(Z \leq \frac{75 - 120}{30}\right)$ =
= p(Z ≤ -1'52) = {suceso contrario} = 1 - p(Z ≤ 1'52**) = 1 - 0'9357 = 0'0643.**
(b)
El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

Nos dicen que p(X ≥ k) = 45% = 0'45 = {tipificamos} = $p\left(Z \geq \frac{k - 120}{30}\right) = 1 - p\left(Z \leq \frac{k - 120}{30}\right)$, de donde tenemos que $p\left(Z \leq \frac{k - 120}{30}\right)$ = 1 – 0'45 = 0'55. Mirando en la tabla de la normal vemos que la probabilidad 0'55 no viene, sino que vienen las probabilidades 0'5478 y 0'5517, que corresponden a los puntos críticos 0'12 y 0'13 por tanto $\frac{k - 120}{30}$ = (0'12 + 0'13)/2 → **k = 120 + 30·0'125 = 123'75, luego 123'75 es el número de k pedido.**